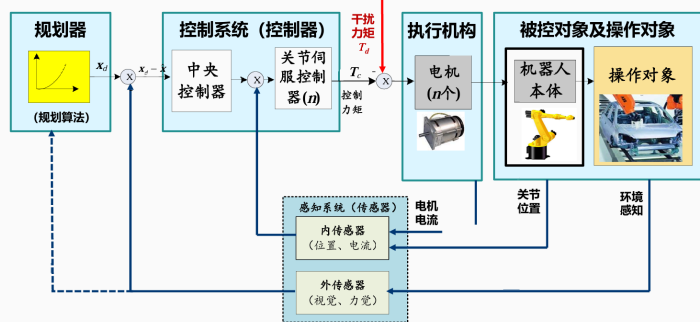


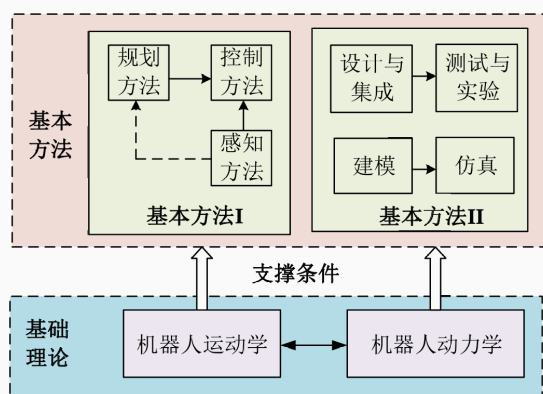
绪论

工业机器人典型作业系统组成：机器人本体、控制柜、示教盒、系统软件、夹具/抓手、外传感器（如视觉、力觉）、外围设备

■ 机器人闭环控制系统



■ 机器人学知识体系：基础理论、基本方法I、基本方法II



空间描述与变换

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix} \quad R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} c_\varphi & 0 & s_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\varphi & 0 & c_\varphi \end{bmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{动轴欧拉角从左往右乘}$$

齐次变换：
$$\begin{bmatrix} {}^A P_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R_B & {}^A P_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a-b-a 型欧拉角的奇异条件： $\beta = 0, \pi$ ， a-b-c 型欧拉角的奇异

条件： $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$

$${}^a \omega_2 = {}^a R_2 \cdot {}^2 \omega_2, \quad {}^a \omega_3 = {}^a R_3 \cdot {}^3 \omega_3$$

小角度近似： $\begin{cases} \cos(\varphi) \approx 1 \\ \sin(\varphi) \approx \varphi \\ \sin(\varphi) \approx 0 \end{cases}$ ，三轴的欧拉角速度近似为姿态角速度

机器人正/逆运动学建模及求解

关节位置： $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$ ，旋转关节：旋转角度 θ_i ；移动

关节：平移位移 d_i

关节速度： $\dot{q} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n]^T$

末端位姿： $X_e = [x_e \ y_e \ z_e \ \alpha_e \ \beta_e \ \gamma_e]^T$

末端速度： $\dot{x}_e = [v_e^T \ \omega_e^T]^T = [v_{ex} \ v_{ey} \ v_{ez} \ \omega_{ex} \ \omega_{ey} \ \omega_{ez}]^T$

位置级正运动学：根据关节位置计算机械臂末端位姿 $X_e =$

$\text{fkine}(q)$

位置级逆运动学：根据机械臂末端位姿计算关节位置 $q =$

$\text{ikine}(X_e)$

一般 6R 机械臂的逆运动学解的个数：最多有 16 组解

6R 机械臂具有解析解（封闭解）的两个充分条件：三个相邻

关节轴交于一点、三个相邻关节轴相互平行

D-H 坐标系的建立：

基座坐标系 $\{x_0 y_0 z_0\}$ ：以基座上感兴趣的位置为 o_0 、关节 1

轴为 z_0

中间杆件坐标系 $\{x_i y_i z_i\}$ ：

➤ z_i ：关节 $i+1$ 轴线

➤ o_i ：若 z_i 和 z_{i+1} 异面，以 D_i 为原点；

若相交，则交点为原点；

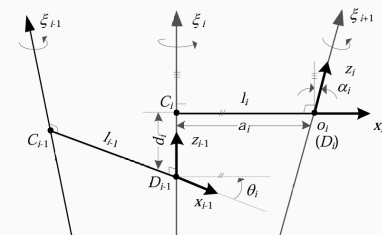
若平行，以 C_{i+1} 为原点。

➤ x_i ：若 z_i 和 z_{i+1} 异面或平行，为公垂线 l_i

若相交，则以两轴所在面法向量

为 x_i ，即 $x_i = \pm(z_i \times z_{i+1})$

➤ y_i ：根据右手定则建立



末端坐标系 $x_n y_n z_n$ ：以末端感兴趣的位置为 o_n ， z_{n-1} 为 z_n ，当 z_{n-1} 轴沿臂展方向时， x_n 轴垂直于臂展方向，当 z_{n-1} 轴垂直于臂展方向时， x_n 轴沿臂展方向

D-H 参数表示：

a_i ：从 z_{i-1} 轴和 x_i 轴的交点到第 i 坐标系原点沿 x_i 轴的偏置距离；

α_i ：绕 x_i 轴由 z_{i-1} 轴转向 z_i 轴的偏角；

d_i ：从第 $(i-1)$ 坐标系的原点到 z_{i-1} 轴和 x_i 轴的交点沿 z_{i-1} 轴的距离；

θ_i ：绕 z_{i-1} 轴由 x_{i-1} 转向 x_i 轴的关节角

相邻连杆坐标间的位姿关系：

$${}^{i-1} T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

微分运动学、奇异分析与性能评价

微分运动学方程： $\dot{x}_e = \begin{bmatrix} v_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_\omega(q) \end{bmatrix} \dot{q} = J(q) \dot{q}$ ， $J(q) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ 为 n 自由度机械臂的速度雅可比矩阵，建立了从关节速度到末端线速度和角速度的映射关系。

平面 2R 机械臂 $\begin{bmatrix} \dot{p}_{ex} \\ \dot{p}_{ey} \\ \dot{\psi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$

空间 3R 肘机械臂的雅可比矩阵：

$${}^0 J(q) = \begin{bmatrix} -s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & -(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -a_3 c_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0 J(q) = \begin{bmatrix} {}^0 R_n & 0 \\ 0 & {}^0 R_n \end{bmatrix} {}^n J(q)$$

$${}^n J(q) = \begin{bmatrix} {}^n R_0 & 0 \\ 0 & {}^n R_0 \end{bmatrix} {}^0 J(q)$$

构造法：雅可比矩阵第 i 列 $J_i = \begin{cases} [\xi_i \times \rho_{i \rightarrow n}]^T, & i \text{ 是旋转关节} \\ [\xi_i]^T, & i \text{ 是移动关节} \end{cases}$ ，确定关

节 i 的运动轴矢量 ${}^0 \xi_i$ 和关节 i 到末端的牵连运动矢量 ${}^0 \rho_{i \rightarrow n}$

奇异：雅可比矩阵行列式为 0；

3R 肘机械臂奇异： $s_3 = 0$ 或 $a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$ ，分别对应肘部奇异（边界奇异，末端损失 x_3 沿臂伸展方向的平动自由度）、肩部奇异（内部奇异，末端损失 z_3 垂直于臂型面 SEW 方向的平动自由度）

3R 球腕机械臂奇异： $s_2 = 0$ ，损失了绕矢量 $\pm(z_1 \times z_2)$ 或 $\pm(z_1 \times z_0)$ 方向的转动自由度（垂直于腕部三轴所处的面）

机器人轨迹规划方法

三次多项式插值：

$$q_i(\tau) = a_{i0} + a_{i1}\tau + a_{i2}\tau^2 + a_{i3}\tau^3$$

$\begin{cases} q_i(0) = q_{i0}, \dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0} \\ q_i(t_f) = q_{if}, \dot{q}_i(t_f) = \dot{q}_{if} \end{cases}$ ，起点、终点速度为 0，四个未知数四个方程，五次多项式同理

笛卡尔轨迹生成的途径：途径1：先求逆运动学，再在关节空间进行规划；途径2：先在笛卡尔空间规划，再求逆运动学

笛卡尔轨迹规划：路径参数化、参数时序化、时间归一化(可选)

直线：

$$\begin{cases} x_t(\lambda) = x_0 + \lambda(x_f - x_0) \\ y_t(\lambda) = y_0 + \lambda(y_f - y_0) \\ z_t(\lambda) = z_0 + \lambda(z_f - z_0) \end{cases}, \lambda \in [0, 1]$$

$$\lambda(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3$$

$$\begin{cases} \lambda(0) = 0, \lambda(\tau_f) = 1 \\ \dot{\lambda}(0) = 0, \dot{\lambda}(\tau_f) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda(\tau) = 3\left(\frac{\tau}{\tau_f}\right)^2 - 2\left(\frac{\tau}{\tau_f}\right)^3$$

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_f}, \lambda(\bar{\tau}) = 3\bar{\tau}^2 - 2\bar{\tau}^3$$

圆弧：

$$\begin{cases} x_t(\varphi) = c_x + R \cos(\varphi) \\ y_t(\varphi) = c_y + R \sin(\varphi) \end{cases}, \varphi \in [\varphi_0, \varphi_f]$$

$$\varphi(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi_0, \varphi(\tau_f) = \varphi_f \\ \dot{\varphi}(0) = 0, \dot{\varphi}(\tau_f) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi_f - \varphi_0}, \lambda \in [0, 1]$$

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_f}, \lambda(\bar{\tau}) = 3\bar{\tau}^2 - 2\bar{\tau}^3$$

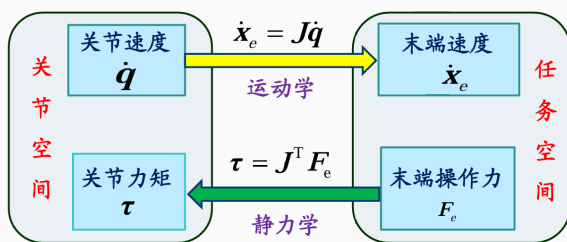
机器人静力学与动力学

机器人静力学：机器人在关节力/力矩及末端力/力矩同时作用下处于平衡状态（状态变量不发生变化，如机器人静止）时，关节力/力矩与末端力/力矩之间的映射关系，称为机器人的静力学。

力雅可比矩阵：速度雅可比矩阵的转置

正向静力学方程： $\tau = J^T F_e$ ， τ 为机器人关节驱动力矩， F_e 为机器人末端作用力

运动学与静力学的对偶关系



- 正运动学：关节空间到任务空间的速度映射
- 正静力学：任务空间到关节空间的静力映射

运动学与静力学之间存在对偶关系，称为**运动-静力对偶性**或**二元性**

机器人动力学方程：

末端与环境接触时，末端操作力为 F_e ，环境反作用力 $-F_e$ ， $D(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + G(q) = \tau - J^T F_e$ ；
 末端不与环境接触时， $F_e = 0$ ， $D(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + G(q) = \tau$ ；

$D(q)$ 为系统等效惯性矩阵，为正定对称阵，与臂型有关。

$D(q)\ddot{q}$ 为惯性力；

$h(q, \dot{q})$ 为速度耦合项，即非线性力，包括科氏力和向心力；

$G(q)$ 为系统所受重力矩，仅与臂型相关

拉格朗日动力学方程： $\tau_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}$

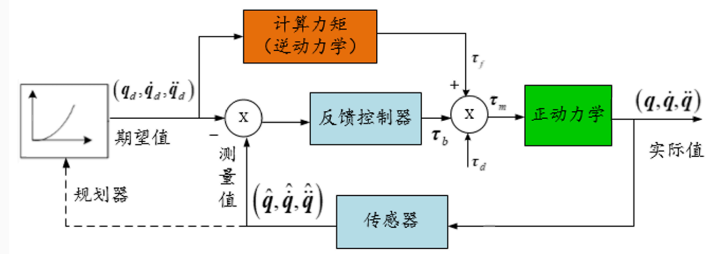
正向动力学：根据受力情况，计算关节运动状态，即

$$(\tau, F_e) \Rightarrow (q, \dot{q}, \ddot{q})$$

逆向动力学：根据关节运动状态情况，计算受力情况，即

$$(q, \dot{q}, \ddot{q}, F_e) \Rightarrow \tau$$

典型应用框图



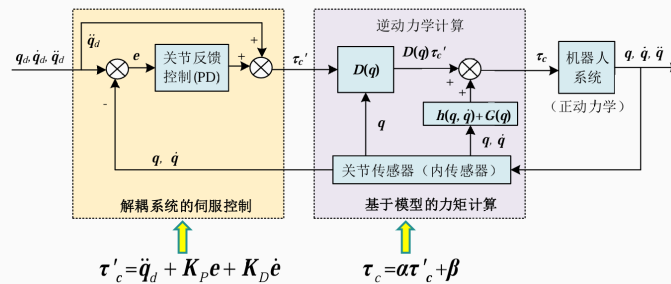
机器人控制方法

基于被控对象状态类型的机器人控制方法分类：运动控制、柔顺控制、视觉控制

线性解耦控制原理

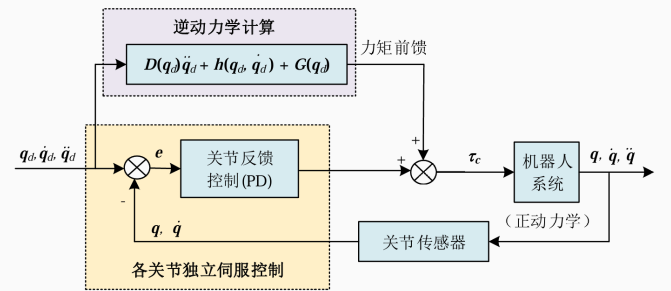
控制方程及控制框图

$$\tau_c = D(q)(\ddot{q}_d + K_p e + K_D \dot{e}) + h(q, \dot{q}) + G(q)$$



控制框图

采用**反馈+前馈补偿**的复合控制，控制框图如下图所示。



计算力矩控制属于动力学控制，也是多关节位置控制。

完整的计算力矩补偿： $\tau_f = D(q_d)\ddot{q}_d + h(q_d, \dot{q}_d) + G(q_d)$

惯性力补偿： $\tau_f = D(q_d)\ddot{q}_d$

近似惯性力补偿： $\tau_f = D_{11}\ddot{q}_{d1} + D_{22}\ddot{q}_{d2} + \dots + D_{nn}\ddot{q}_{dn}$

重力补偿： $\tau_f = G(q_d)$

非线性力补偿： $\tau_f = h(q_d, \dot{q}_d)$

其他补偿：摩擦力、扰动力补偿等

柔顺控制 (Compliance Control)：机器人能够顺应接触环境的能力被称为柔顺性 (compliance)，与之对应的控制方式即为柔顺控制，又叫顺应控制或依从控制。

基于位置的阻抗 (导纳控制)

控制框图

