概率论速记

Z

December 9, 2024

1 协方差与相关系数

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$D(X+Y)=D(X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)+D(Y)$$
$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

2 切比雪夫不等式

$$P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

3 中心极限定理

3.1 独立同分布的中心极限定理（林德伯格-莱维中心极限定理）

设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 独立同分布,且具有有限的数学期望和方差 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2$，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

3.2 棣莫弗-拉普拉斯定理

在 n 重伯努利试验中，成功概率为 p，成功次数为 Y_n，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{Y_n-np}{\sqrt{npq}}\leq x\right)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

4　数理统计中的三大分布

4.1　χ^2 分布

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为 n 个 $(n \geq 1)$ 相互独立的随机变量，它们都服从标准正态分布 $N(0,1)$。

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

则随机变量 Y 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $Y \sim \chi^2(n)$。

4.2　t 分布

设随机变量 X, Y 相互独立，且 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$。

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

则随机变量 T 服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $T \sim t(n)$。

4.3　F 分布

设随机变量 X, Y 相互独立，且 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$。

$$F = \frac{\frac{X}{n_1}}{\frac{Y}{n_2}}$$

则随机变量 F 服从第一自由度为 n_1，第二自由度为 n_2 的 F 分布，记作 $F \sim F(n_1, n_2)$。

5　抽样分布

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right)$$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则样本均值

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

样本方差 S^2 与样本均值 $\overline{X}$ 相互独立，且

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{S} \sim t(n-1)$$

6 评定估计量的标准

6.1 无偏性

$$E[\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。

6.2 有效性

$$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效。

6.3 相合性

$\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ，即对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\hat{\theta} - \theta| \ge \varepsilon\right) = 0$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量。

7 区间估计

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{x}, s^2$ 分别为样本均值和样本方差。

7.1 σ^2 已知

μ 的一个置信区间为

$$\left(\overline{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

7.2 σ^2 未知

μ 的一个置信区间为

$$\left(\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

7.3 σ^2 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

8 常用分布

分布	分布列或概率密度	数学期望	方差
$0-1$ 分布 $B(1,p)$	$P(X=k)=p^kq^{1-k}$, $k=0,1,\ 0<p<1,\ p+q=1$	p	pq
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$, $k=0,1,\dots,n,\ 0<p<1,\ p+q=1$	np	npq
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k=0,1,2,\dots,\ \lambda>0$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$P(X=k)=q^{k-1}p$, $k=1,2,\dots,\ 0<p<1,\ p+q=1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
均匀分布 $U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, 其他\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<\mu<+\infty,\ \sigma>0$	μ	σ^2

9 Γ 函数

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$$

若 n 为正整数，则

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

递推公式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

特殊值

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$